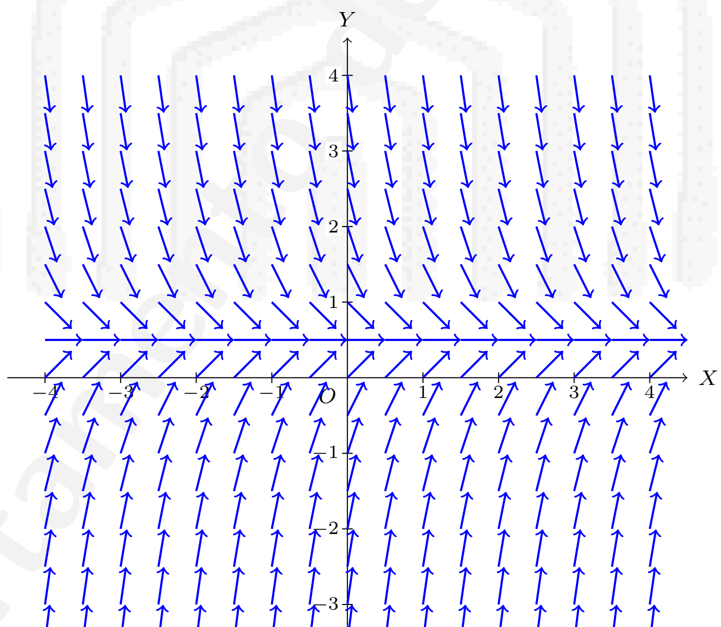
MA2115 Clase 9: Campos Direccionales, Curvas Integrales. Existencia y Unicidad

Elaborado por los profesores
Edgar Cabello y Marcos González

La ecuación $y' = f(x, y)$ determina el coeficiente angular de la tangente a la curva integral si en cada punto de un intervalo se ha dada valor de alguna magnitud entonces se dice que está definida el campo de esta magnitud.

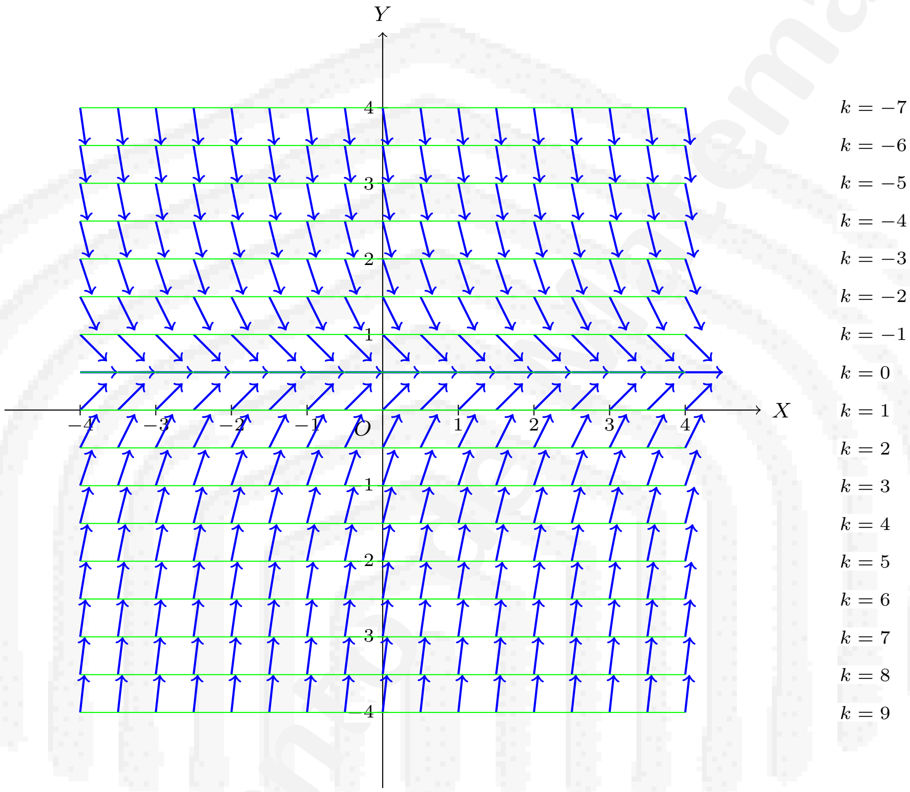
Definición 1 *La ecuación diferencial $y' = f(x, y)$ da un valor para y' que representa la pendiente de la recta tangente a la curva integral $y = \phi(x)$ que pasa por el punto (x, y). Si asignamos a cada punto un segmento de esta recta, el conjunto de todos estos segmentos es llamado campo direccional para $y' = f(x, y)$. Es decir, la ecuación $y' = f(x, y)$ determina un campo de direcciones.*



Campo direccional asociado a la EDO $y' = 1 - 2y$

El problema de integración de la ecuación $y' = f(x, y)$ consiste en hallar una curva cuya tangente en cada punto tenga la misma dirección que el campo en ese punto.

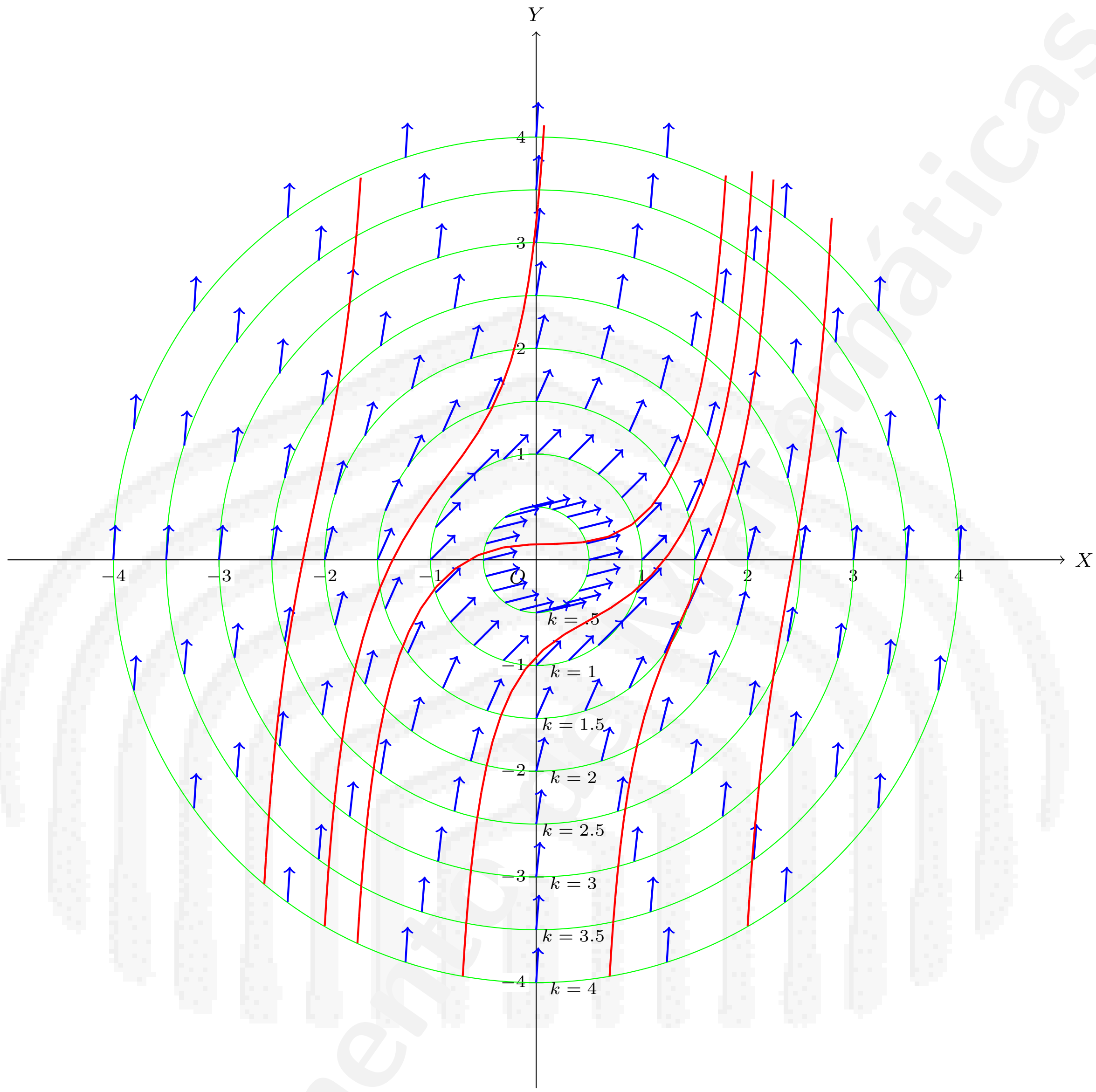
Definición 2 *Dada una ecuación $y' = f(x,y)$, una isoclina es el lugar geométrico de todos los puntos en los cuales las tangentes a las curvas integrales consideradas tienen una misma dirección. La familia se determina por la ecuación $k = f(x,y)$, donde k es un parámetro.*



Isoclinas asociadas a la EDO $y' = 1 - 2y$

Ejemplo 1 *Usando isoclinas bosqueje las curvas integrales de $\dfrac{dy}{dx} = x^2 + y^2$.*

Solución: Haciendo $\dfrac{dy}{dx} = k$, tenemos que las isoclinas están dadas por ecuaciones de la forma $k = x^2 + y^2$. Están ecuaciones son circunferencias centradas en el origen para $k > 0$, se reduce al origen si $k = 0$ (porque $x^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$) y no tienen puntos para $k < 0$.



Isoclinas y curvas integrales asociadas a la EDO $\dfrac{dy}{dx} = x^2 + y^2$

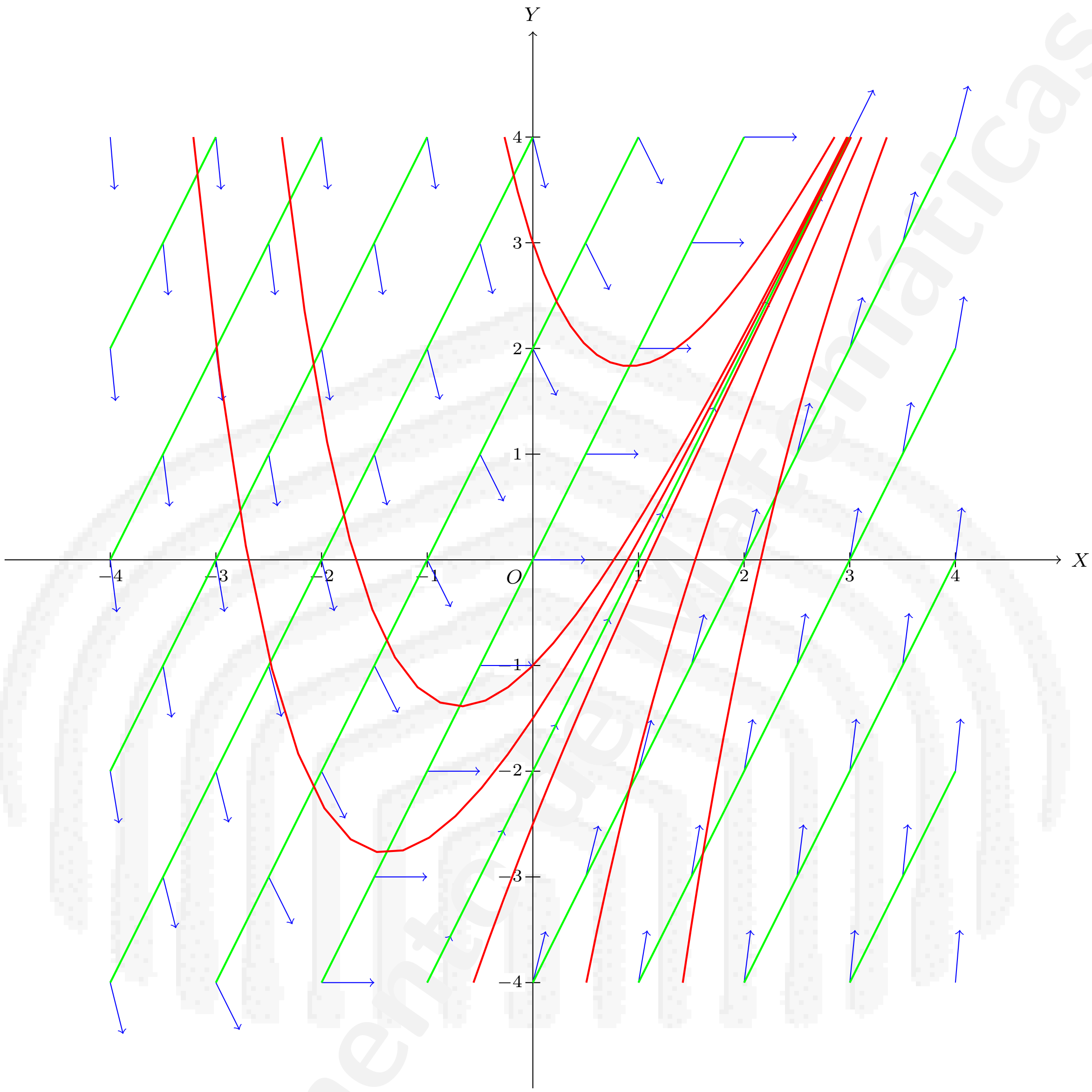
Ejemplo 2 *Trazar las curvas integrales de $y' = 2x - y$.*

Solución: $2x - y = k \Rightarrow y = 2x - k$

$k = 0 \Rightarrow y = 2x$

$k = -1 \Rightarrow y = 2x + 1$

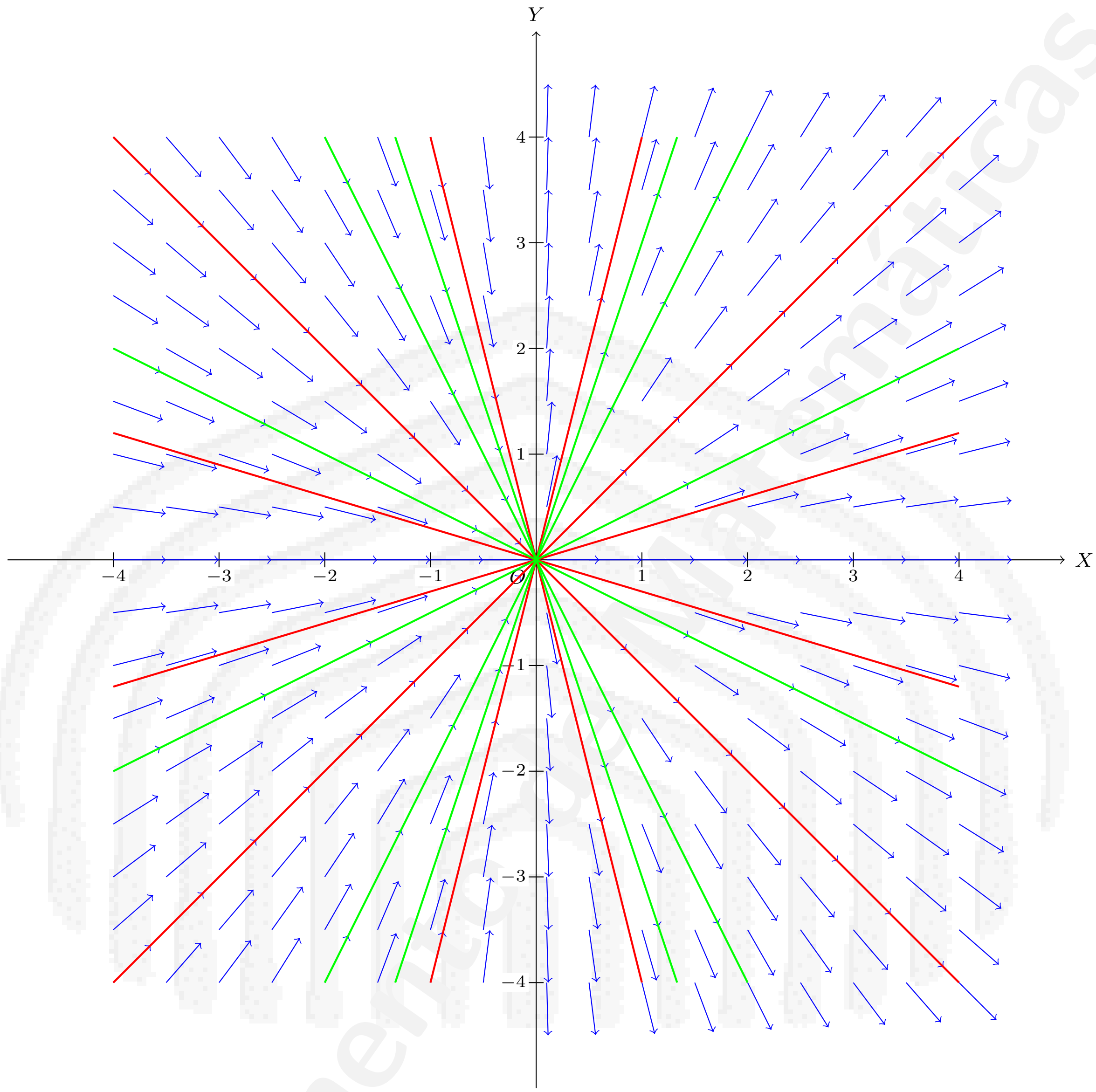
$k = 1 \Rightarrow y = 2x - 1.$



Isoclinas y curvas integrales asociadas a la EDO $y' = 2x - y$

Ejemplo 3 *Trazar las curvas integrales de* $y' = \dfrac{y}{x}$.

Solución: $y' = \dfrac{y}{x}$ luego $k = \dfrac{y}{x} \Rightarrow kx$ familia de rectas que pasan por el origen.



Isoclinas y curvas integrales asociadas a la EDO $y' = \dfrac{y}{x}$.

En este caso, las isoclinas y las curvas integrales coinciden.

Ejemplo 4 *Trazar las curvas integrales de* $y' = y - x^2 + 2x - 2$.

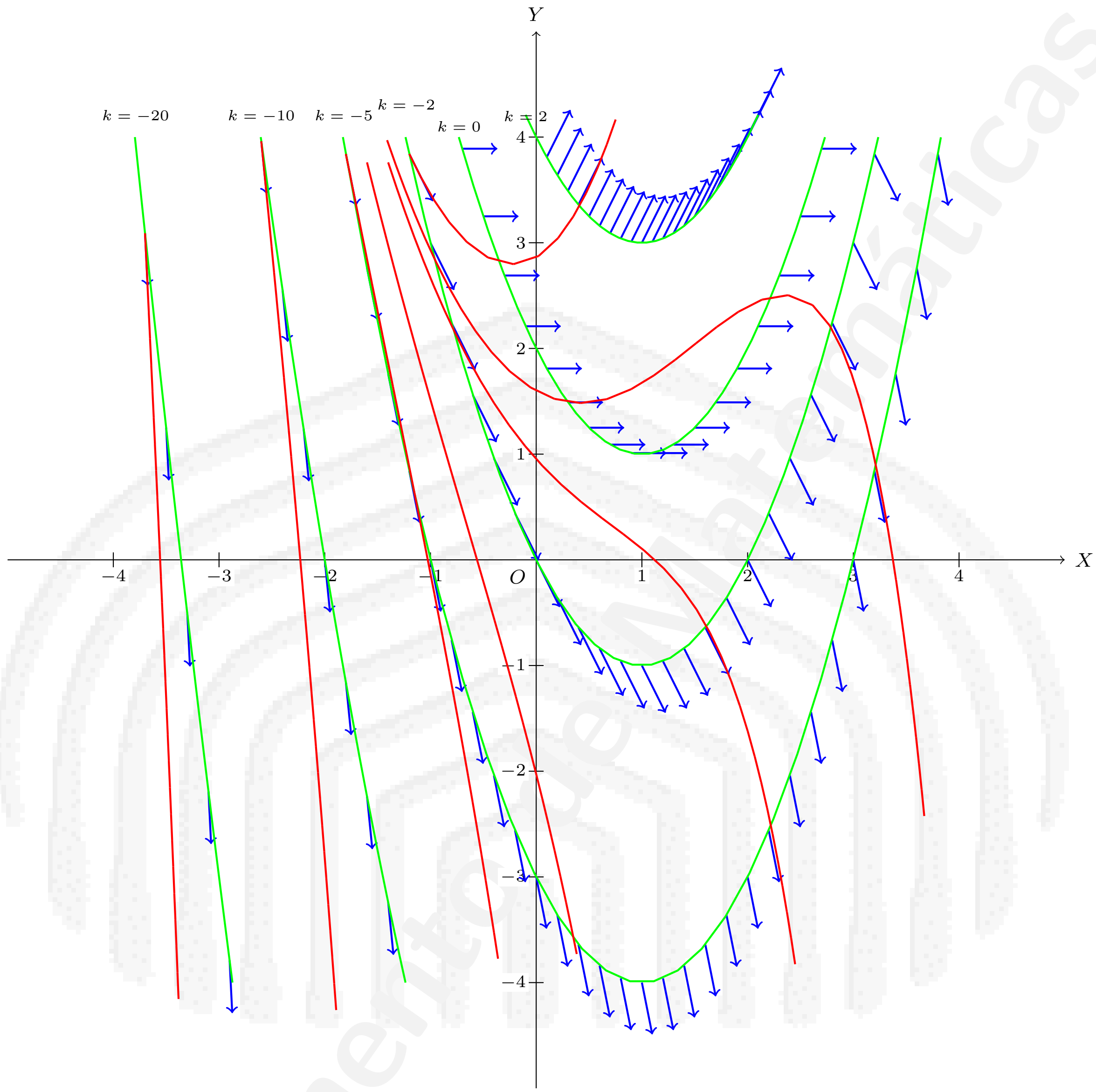
Solución: Sea $y' = k$ entonces $y - x^2 + 2x - 2 = k$. Las isoclinas son parábolas $y = x^2 - 2x - 2 + k$. Si $k = 0$ las curvas integrales tienen tangentes horizontales en los puntos de intersección con la isoclina $y = x^2 - 2x + 2$.

La isoclina $y = x^2 - 2x + 2$ divide al plano en dos partes una con $y' < 0$ y otra con $y' > 0$.

Dirección de concavidades

$$y'' = y' - 2x + 2 = y - x^2 + 2x - 2 - 2x + 2$$

$y'' = y' - x^2$ se anula sólo en los puntos de $y = x^2$.



Isoclinas y curvas integrales asociadas a la EDO $y' = y - x^2 + 2x - 2$.

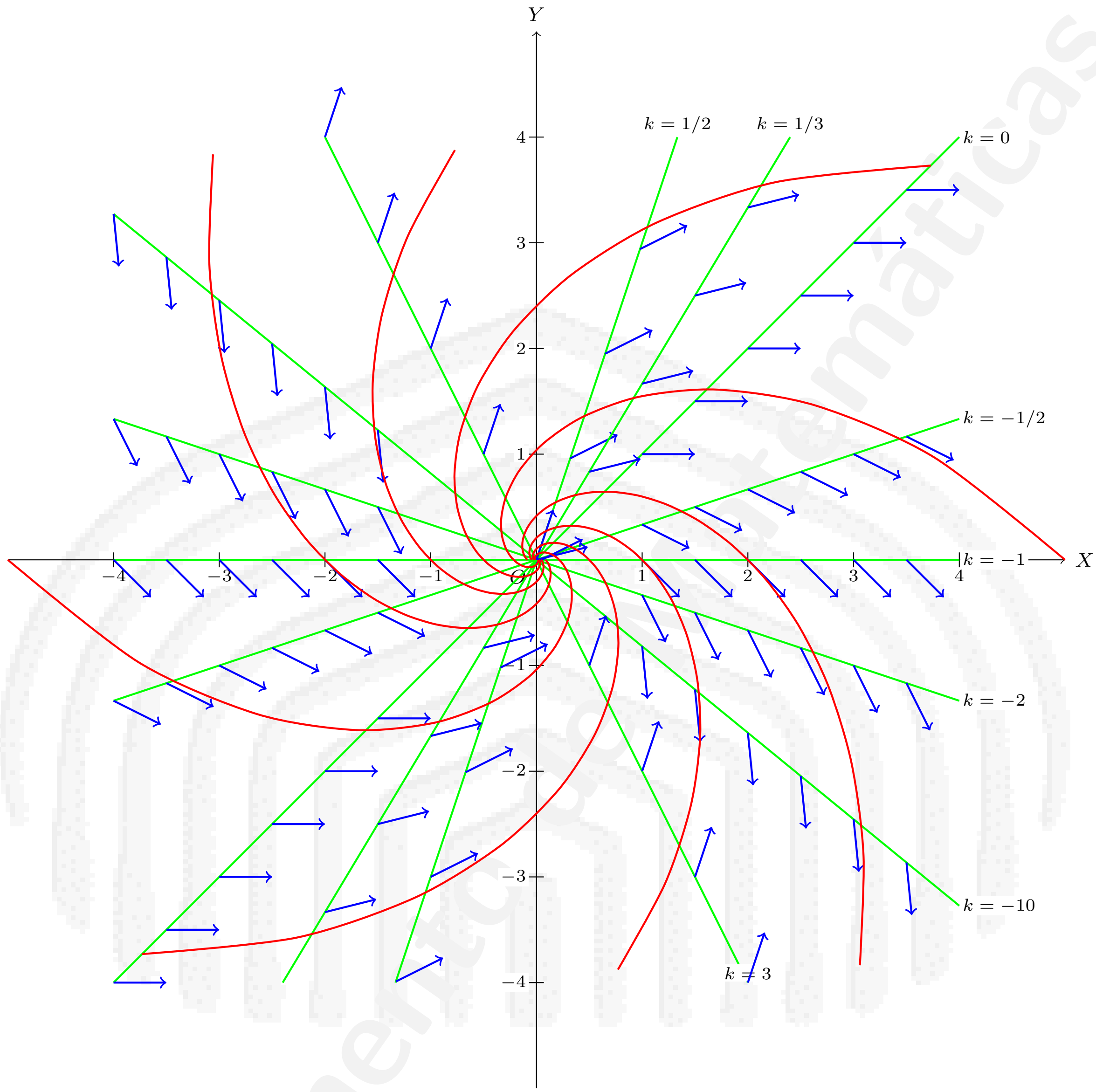
Ejemplo 5 *Trazar las curvas integrales de* $y' = \dfrac{y-x}{y+x}$.

Solución: Sea $k = y'$, así $k = \dfrac{y-x}{y+x} \Rightarrow yk + xk = y - x \Rightarrow y - yk = kx + x$
$\Rightarrow y = \dfrac{kx+x}{1-k} = \dfrac{k+1}{1-k}x$. La ecuación $y = \dfrac{k+1}{1-k}x$ describe una familia de rectas que pasan por el origen de coordenadas.

Para $k = -1$ se tiene $y = 0$,

para $k = 0$ se tiene $y = x$.

Si estudiamos $y' = \dfrac{y+x}{y-x}$ se tiene las isoclinas $y = -x$



Isoclinas y curvas integrales asociadas a la EDO $y' = \dfrac{y-x}{y+x}$.

1 Existencia y Unicidad de Soluciones

Si consideramos la ecuación diferencial $y' = 2x$ podemos buscar una solución $\phi(x) = f$ tal que en $x = 1$ esta solución tiene valor 4, es decir, podemos escribir como

$$\frac{dy}{dx} = 2x \quad \text{con} \quad y(1) = 4.$$

De aquí podemos hacer $dy = 2xdx$. Luego integramos y resulta $y = x^2 + C$ ya al sustituir $x = 1$, $y = 4$ se tiene $4 = 1 + C \Rightarrow C = 3$. Así, $f(x) = x^2 + 3$.

Ejemplo 6 $y'' + y = 0$; $y(1) = 3$; $y'(1) = -4$. *Este problema consiste en determinar una solución de* $y'' + y = 0$ *que toma valor de 3 en* $x = 1$ *y cuya primera derivada toma el valor de* -4 *en* $x = 1$.

Definición 3 *Considere la ecuación diferencial de primer orden* $y' = f(x, y)$ *donde* f *es una función continua de* x *e* y *en algún dominio* D *del plano* xy *y si* (x_0, y_0) *un punto de* D. *El problema de valor inicial asociado con* $y' = f(x, y)$ *es determinar una solución* ϕ *de* $y' = f(x, y)$ *definida en algún intervalo real que contenga a* x_0 *y que satisfaga la condición inicial* $\phi(x_0) = y_0$.

Teorema 1 (Teorema de Existencia y Unicidad de Picard) *Considere la ecuación diferencial*

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{1}$$

donde

1. *La función* f *es una función continua de* x *e* y *en algún dominio* D *del plano* xy, *y*
2. *La derivada parcial* $\partial f/\partial y$ *es también una función continua de* x *e* y *en* D *y sea* (x_0, y_0) *un punto de* D.

Entonces existe una solución única ϕ *de la ecuación diferencial (1) definida en algún intervalo* $|x - x_0| \leq h$ *donde* h *es suficientemente pequeño que satisface* $\phi(x_0) = y_0$.

Ejemplo 7 *Sea* $\dfrac{dy}{dx} = x^2 + y^2$, $y(1) = 3$. *Aquí* $f(x, y) = x^2 + y^2$ *y* D *es todo el plano* xy. *Luego* $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2y$ *y* $f(x, y)$ *son continuas en* D.
$y(1) = 3$ *significa* $x_0 = 1$, $y_0 = 3$ *y el punto* $(1, 3)$ *está en algún dominio* D *de* $y' = x^2 + y^2$ *definida en* $|x - 1| \leq h$ *en torno a* $x_0 = 1$ *que satisface* $\phi(1) = 3$.

Ejemplo 8 *Consideremos el problema a valor inicial*

$$\frac{dy}{dt} = (\operatorname{sen} 2t) y^{1/3}; \quad y(0) = 0. \tag{2}$$

Una solución de (2) *es* $y(t) = 0$. *Podemos obtener otras soluciones si no tomamos en cuenta el hecho* $y(0) = 0$. *Observemos que*

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{y^{1/3}} = \operatorname{sen} 2t \quad &\Rightarrow \quad y^{-1/3} dy = \operatorname{sen} 2t dt \\
&\Rightarrow \quad \frac{3}{2} y^{2/3} = -\frac{1}{2} \cos 2t + C \quad \textit{como } y(0) = 0 \\
&\Rightarrow \quad \frac{3}{2} y^{2/3} = \frac{1 - \cos 2t}{2} = \operatorname{sen}^2 t \\
&\Rightarrow \quad y^{2/3} = \frac{2}{3} \operatorname{sen}^2 t \Rightarrow y = \pm\sqrt{\frac{8}{27}} \operatorname{sen}^3 t
\end{aligned}$$

de donde $y = \pm\sqrt{\dfrac{8}{27}} \operatorname{sen}^3 t$ *son soluciones de* (2). *Es importante encontrar cuál es la solución. Si derivamos el segundo miembro de* $\dfrac{dy}{dx} = (\operatorname{sen} 2t) y^{1/3}$ *se ve que no tiene* $\left.\dfrac{\partial}{\partial y}\right|_{y=0}$.

Ejemplo 9 (Falta de unicidad) *En la ecuación diferencial*

$$\frac{dy}{dt} = 3y^{2/3}, \tag{3}$$

el lado derecho es una función continua en todo el plano ty. Desafortunadamente, la derivada parcial de $y^{2/3}$ con respecto a y no existe si $y = 0$.

Vamos a integrar (3):

$$\int \frac{dy}{y^{2/3}} = \int 3dt \Rightarrow \cancel{3}y^{1/3} = \cancel{3}t + C.$$

Es decir, $y(t) = (t + C)^3$, donde C es una constante arbitraria.

Consideremos el problema a valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = 3y^{2/3}, \quad y(0) = 0.$$

Una solución es $y(t) = 0$ para todo t. Otra solución es $y(t) = (t + C)^3$. Si $y(0) = 0$ entonces $0 = (0 + C)^3$ de donde $C = 0$. Así, $y = t^3$ es otra solución. En conclusión $y_1 = 0$, $y_2 = t^3$ son soluciones para una misma ecuación diferencial.

Ejemplo 10 (Existencia) $\dfrac{dy}{dt} = 1 + y^2; \quad y(0) = 0.$

El campo de inclinación de las pendientes crecen cuando y aumenta. Por consiguiente, dy/dt crece con mayor rapidez cuando $y(t)$ aumenta. Probablemente exploten las soluciones (es decir, tiendan al infinito rapidamente).

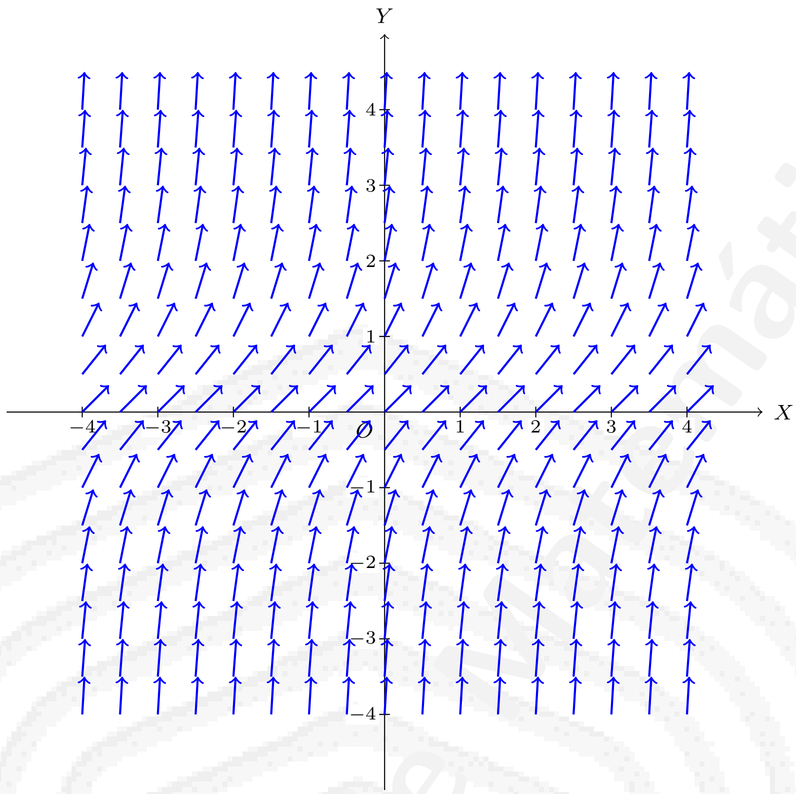
Veamos un método analítico:

$$\frac{dy}{1+y^2} = dt$$

$\arctan y = t + C$, *C constante*

$y = \tan(t + C)$ *solución.*

Si usamos $y(0) = 0$, $0 = y(0) = \tan(0 + C)$ encontramos $\tan(C) = 0$, es decir, $C = 0$ ó $C = n\pi$, para algún $n \in \mathbb{Z}$. Así, la solución particular es $y(t) = \tan t$.



Campo direccional y curvas integrales asociadas a la EDO $y' = 1 + y^2$

Ejemplo 11 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{\sqrt{x}}; \quad y(1) = 2.$

Solución: Sea $f(x, y) = \dfrac{y}{x^{1/2}}$ continua excepto para $x = 0$, $(x_0, y_0) = (1, 2)$.
El cuadrado de lado 1 con centro $(1, 2)$ no contiene al eje y.

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

El problema tiene solución.

Ejemplo 12 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{\sqrt{x}}; \quad y(0) = 2.$

Solución: $f(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x}}$ es continua excepto en $x = 0$. $x_0 = 0; y_0 = 2$ f no es continua. $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ no es continua en $x = 0$, ya que $(0, 2)$ no puede ser incluido en D. No podemos concluir que el problema tenga solución. No estamos afirmando que no tenga una solución.

Ejemplo 13 *Halle un rectángulo* $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$ *en el cual se pueda garantizar la validez del Teorema de Picard:* $(y - 2x)y' = x - y$; $y(-1) = 1$.

Solución: El problema $y' = \dfrac{x - y}{y - 2x}$, $x_0 = -1$, $y_0 = 1$, se debe verificar que: f es continua, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ continua en $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$:

i) $f = \dfrac{x-y}{y-2x}$ es continua para $y \neq 2x$

ii) $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{-1(y-2x)-(x-y)1}{(y-2x)^2} = \dfrac{x}{(y-2x)^2}$ si $y - 2x = 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ es discontinua.

El punto $(-1, 1)$ no está en $y - 2x = 0$ pues $1 - 2(-1) = 1 + 2 \neq 0$. Por lo tanto, el rectangulo pedido contiene el punto $(-1, 1)$ en su interior y está en el semiplano $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon y + 2x < 0\}$.

2 Ecuaciones Lineales de primer orden. El Método del factor integrante

El método de factor integrante nos permitirá hallar las soluciones de una ecuación diferencial lineal de primer orden

$$y' + P(x)y = g(x)$$

en forma explícita nos puede asegurar que existe una solución al problema

$$y' + P(x)y = g(x); \quad y(x_0) = y_0.$$

Teorema 2 *Si $P(x)$ y $g(x)$ son continuas en un intervalo abierto J que contiene x_0, entonces*

(i) *Todas la soluciones de la ecuación $y' + P(x)y = g(x)$ se obtienen dando valores reales a la constante C en*

$$y = \frac{1}{\mu(x)} \left(\int \mu(x) g(x) dx + C \right),$$

donde $\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$. La función $\mu(x)$ es llamada el factor integrante de la ecuación diferencial.

(ii) *Existe una única solución al problema de valores iniciales $y' + P(x)y = g(x)$, $y(x_0) = y_0$, para todo $x \in J$.*

Demostración: **(i)** Si $y(x)$ es solución de $y' + P(x)y = g(x)$, también lo será si multiplicamos por $\mu(x)$, es decir, se cumple que

$$\mu(x)y' + \mu(x)P(x)y = \mu(x)g(x). \tag{4}$$

De la relación $\mu(x) = e^{\int P(x)dx}$ se tiene que

$$\mu'(x) = P(x)\mu(x) \tag{5}$$

Así, (4) se escribe

$$\mu(x)y' + \mu'(x)y = g(x)\mu(x)$$

$$\Leftrightarrow (\mu(x)y)' = g(x)\mu(x).$$

Integrando

$$\mu(x)y(x) = \int g(x)\mu(x)dx + C$$

$$\Leftrightarrow y(x) = \frac{1}{\mu(x)}\left[\int \mu(x)g(x)dx + C\right].$$

(ii) Si $x = x_0$, $y = y_0$ en

$$y(x) = \frac{1}{\mu(x)}\left(\int \mu(x)g(x)dx + C\right),$$

se obtiene un único valor $C = C_0$; $y(x) = \dfrac{1}{\mu(x)}\left(\int \mu(x)g(x)dx + C_0\right)$.

Ejemplo 14 *Resolver* $(1+e^x)\dfrac{dy}{dx} + e^x y = 0$.

Solución: $(1+e^x)\dfrac{dy}{dx} + e^x y = 0 \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} + \dfrac{e^x}{1+e^x}y = 0$

$P(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x}$, $g(x) = 0$.

$\mu(x) = e^{\int P(x)dx} = e^{\int \frac{e^x}{1+e^x}dx} = 1 + e^x$. Multiplicando la ecuación $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{e^x}{1+e^x}y = 0$ por $\mu(x)$ se obtiene

$$(1+e^x)\frac{dy}{dx} + (1+e^x)\frac{e^x}{1+e^x}y = 0$$

$$\Leftrightarrow (1+e^x)\frac{dy}{dx} + e^x y = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dx}\left[(1+e^x)y\right] = 0$$

Integrando: $(1+e^x)y = C \Rightarrow y = \dfrac{C}{1+e^x}$.

También podemos resolver la ecuación $(1+e^x)\dfrac{dy}{dx} + e^x y = 0$ usando el método de separación de variables:

$$(1+e^x)\frac{dy}{dx} = -e^x y \Rightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{e^x}{1+e^x}dx$$

$$\Rightarrow \ln y = -\ln C|1+e^x| \Rightarrow \ln y + \ln C|1+e^x| = 0$$

$$\ln\left[Cy(1+e^x)\right] = 0 \Rightarrow Cy(1+e^x) = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{C(1+e^x)}.$$

Ejemplo 15 *Resolver* $xdy - ydx - (1-x^2)dx = 0.$

Solución: Es claro que $xdy - ydx - (1-x^2)dx = 0 \Leftrightarrow x\frac{dy}{dx} - y - (1-x^2) = 0$, y dividiendo entre x, obtenemos la ecuación lineal de primer orden $\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y = \frac{1-x^2}{x}$. Multiplicando ahora por el factor integrante $\mu(x) = e^{-\int \frac{dx}{x}} = e^{-\ln x} = -\frac{1}{x}$, obtenemos la ecuación $\left(\frac{1}{x}y' - \frac{y}{x^2}\right) = \frac{1-x^2}{x^2}$, que se puede expresar como $\left(\frac{y}{x}\right)' = \frac{1-x^2}{x^2}$, de donde $\frac{y}{x} = \int \frac{1-x^2}{x^2}dx$. Por lo tanto, $\frac{y}{x} = -\frac{1}{x} - x + C$, para algún $C \in \mathbb{R}$. Finalmente, la solución es $y = -1 - x^2 + C$.

Ejemplo 16 *Resolver la ecuación* $(x + y\cos x)dx + \operatorname{sen} x dy = 0$.

Solución: $(x + y\cos x)dx + \operatorname{sen} x dy = 0$

$$x + y\cos x + \operatorname{sen} x\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}y = -\frac{x}{\operatorname{sen} x} \tag{6}$$

$\mu(x) = e^{\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}dx} = e^{\ln|senx|} = \operatorname{sen} x$, multiplicando la ecuación (6) por $\operatorname{sen} x$ se tiene que

$$y'\operatorname{sen} x + y\cos x = -x \Rightarrow (y\operatorname{sen} x)' = -x$$

entonces $y\operatorname{sen} x = -\frac{x^2}{2} + C$

$$y = \frac{C}{\operatorname{sen} x} - \frac{x^2}{2\operatorname{sen} x} \text{ para } x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Ejemplo 17 *Resolver* $y' - \frac{2y}{x-1} = (x-1)^3$.

Solución: $y' - \frac{2y}{x-1} = (x-1)^3$; $P(x) = \frac{-2}{x-1}$; $\mu(x) = e^{-\int P(x)dx}$

$$\mu(x) = e^{\int \frac{2dx}{x-1}} = e^{-2\ln|x-1|} = \frac{1}{(x-1)^2}$$

$$\frac{1}{(x-1)^2}y' - \frac{1}{(x-1)^2}\frac{2y}{x-1} = \frac{1}{(x-1)^2}(x-1)^3$$

$$\left(y\frac{1}{(x-1)^2}\right)' = x-1$$

$$y\frac{1}{(x-1)^2} = \frac{1}{2}(x-1)^2 + C$$

$$y = (x-1)^2\left[\frac{1}{2}(x-1)^2 + C\right].$$

Ejemplo 18 *Resolver* $\frac{dy}{dx} - 2xy = x$.

Solución: La ecueción tiene la forma: $\dfrac{dy}{dx} + P(x)y = G(x)$ donde $P(x) = -2x$; $G(x) = x$. Así,

$$\mu(x) = e^{\int P(x)dx} = e^{-\int 2xdx} = e^{-x^2},$$

multiplicando la ecuación por $\mu(x)$

$$e^{-x^2}\frac{dy}{dx} - 2xe^{-x^2}y = e^{-x^2}x$$

de donde

$$\left(e^{-x^2}y\right)' = e^{-x^2}x \Rightarrow ye^{-x^2} = \int xe^{-x^2}dx + C$$

$$ye^{-x^2} = -\frac{e^{-x^2}}{2} + C \Rightarrow y = -\frac{1}{2} + Ce^{x^2}.$$

Ejemplo 19 *Obtener la solución del problema* $\dfrac{dy}{dt} + 2ty = t$*;* $y(1) = 2$*.*

Solución: La ecuación diferencial tiene la forma: $\dfrac{dy}{dx} + P(x)y = G(t)$, y el factor integrante es $\mu(x) = e^{\int P(t)dt} = e^{\int 2tdt} = e^{t^2}$. Multiplicando por $\mu(x)$ ambos miembros de la ecuación dada, obtenemos

$$e^{t^2}\frac{dy}{dt} + e^{t^2}ty = e^{t^2}t$$

de donde

$$\left(e^{t^2}t\right)' = e^{t^2}t \Rightarrow e^{t^2}y = \int te^{t^2}dt + C$$

$$\Rightarrow e^{t^2}y = \frac{1}{2}e^{t^2} + C \Rightarrow y = \frac{1}{2} + Ce^{-t^2}.$$

Para $t = 1$, $y = 2$ y, así, $2e = \frac{1}{2}e + C \Rightarrow C = \frac{3}{2}e$ de donde $y = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}e^{1-t^2}$.

Ejemplo 20 *Resolver* $xy' - 2y = x^3$*;* $y(1) - 2$*.*

Solución: $x\dfrac{dy}{dx} - 2y = x^3$, $x \neq 0$.

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x}y = x^2$$

Sea $\mu(x) = e^{-\int \frac{2}{x}dx} = e^{-2\ln x} = e^{x^{-2}} = \dfrac{1}{x^2}$.

Multiplicando $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{2}{x}y = x^2$ por $\mu(x)$, obtenemos

$$x^{-2}\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x^3}y = 1 \Rightarrow x^{-2}y' - 2x^{-3}y = 1$$

$$(x^{-2}y)' = 1 \Rightarrow x^{-2}y = x + C.$$

Haciendo uso de las condiciones $x = 1$, $x = 2$

$$1 \cdots 2 = 1 + C \Rightarrow C = 1$$

$$x^{-2}y = x + 1 \Rightarrow y = x^3 + x^2.$$

Ejemplo 21 *Resolver* $y'\left(2xy+e^{y^2}\right)=1.$

$$\textbf{Solución: } \frac{dy}{dx}\left(2xy+e^{y^2}\right)=1 \Rightarrow 2xy\frac{dy}{dx}+e^{y^2}\frac{dy}{dx}=1$$
$$\frac{dx}{dy}=2xy+e^{y^2} \Rightarrow \frac{dx}{dy}-2xy-e^{y^2}=0 \text{ lineal en } y.$$
$$\frac{dx}{dy}-2xy=e^{y^2} \Rightarrow \mu(x)=e^{-\int 2ydy}=e^{-y^2}+C$$
$$e^{-y^2}x'-2xye^{-y^2}=1 \Rightarrow \left(xe^{-y^2}\right) xe^{-y^2}=y+C \Rightarrow x=e^{y^2}(y+C).$$

Correcciones y gráficos: Boris Iskra

February 22, 2010